АГ Иванов 18.12.12

$K: F(x,y,t) = 0$ $\quad C(x_0, y_0, t_0)$ център

$\Pi(C) = \{t=0\}$ (безкрайната права)

$F_1(C)x + F_2(C)y + F_3(C)t = 0$

„C" е център $\Leftrightarrow t = 0$

поне две от числата т.е. $(F_1(C) = 0; F_2(C) = 0)$ и не по-точно

$F_1(C) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0$

$F_2(C) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0$

1сл) $\Rightarrow$ краен $\longrightarrow$ $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

1 крайна права

при $A_{33} = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

2сл) безкраен център т.е. $t = 0$

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{ако } A_{33} \neq 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = t_0 = 0 \Rightarrow \text{НР}$$

За да има решение трябва $A_{33} = 0$, т.е. да е от хиперболичен вид. Тогава има само едно решение т.е. има точно един безкраен център $\Rightarrow$ параболата има един безкраен център

Т1

Крива от 2-ра степен е симетрична спрямо всеки свой краен център (всеки краен център е център на симетрия на крива)

Док-во

Нека $C(x_0, y_0, 1)$ е център на K

$K: a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$

Преминаме координатната система в друга $x = \bar{x} + a$, $y = \bar{y} + b$ и искаме $x_0 = y_0 = 0$.

Чрез транслация в нова $\bar{K} = l\vec{e}_1\vec{e}_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \\ t = \bar{t} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} x & \bar{x} & x_0 \\ y & \bar{y} & y_0 \\ t & \bar{t} & t_0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\bar{K}\ a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + \bar{x}\underbrace{(2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13}t_0)}_{F_1(C)=0} +$$

$$+ \bar{y}\underbrace{(2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_{23}t_0)}_{F_2(C)=0} + \underbrace{a_{33}}_{=0} \Rightarrow$$

$$\phi\bar{K}: a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + \overline{a_{33}} = 0$$

Кривата е симетрична спрямо началото

Ако $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{K} \Rightarrow (-\bar{x}, -\bar{y}) \in \bar{K}$

централно уравнение на права от II-ра степен

Параболата няма краен център!

$$\bar{a}_{33} = a_{33} + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 = F(C)$$

По формулата на Ойлер получаваме

$$F(C) = \underbrace{F_1(C)}_{0}x_0 + \underbrace{F_2(C)}_{0}y_0 + F_3(C) \Rightarrow a_{33} = F_3(C) \text{ т.е.}$$

$$\phi\ a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + a_{22}\bar{y} + F_3(C) = 0$$

Деф: Асимптота на крива от II-ра степен

Полюса на безкрайната точка на кривата т.е. допирателна в безкрайната точка на кривата съвпада с полярата на безкрайната точка на кривата

Деф: Диаметър

Полюса на безкрайна точка

Парабола има една асимптота

Хипербола има две асимптоти

Sled

Всяка асимптота минава през всеки център на кривата

$\Pi_3(C) = \{t=0\} \Rightarrow$

безкрайната точка на кривата принадлежи на $\Pi_3(C) \Rightarrow$ помислю спрегната т.е.

$F(C)$ (безкрайната точка на кривата) $= 0 \Rightarrow$

$F(\text{безкр. т.}, C) = 0 \Rightarrow C \in \Pi(\text{безкр. т.})$

Следствие

Всеки диаметър минава през всеки център

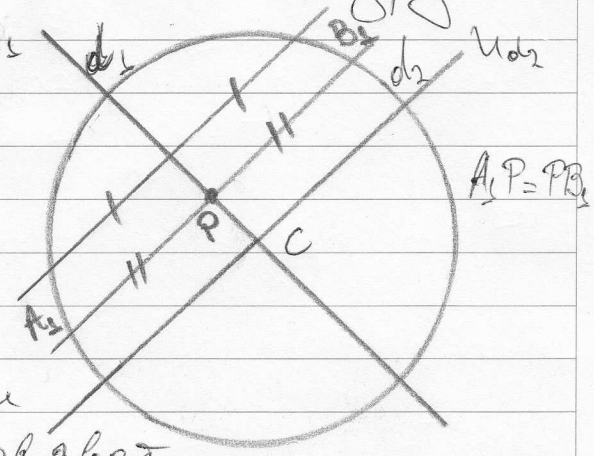
Спрегнати диаметри

d d - диаметър. d_1 е спрегнат на диаметър d_2, ако полюсът на единият лежи на другият

Ако U_{d_1} е полюс на $d_2 \Rightarrow$

$d_2 = \Pi(U_{d_1}) \Rightarrow d_1 = \Pi(U_{d_2})$

U_{d_1} е безкрайна точка на d_1



Св-во

Ако два диаметъра са спрегнати, то хордите успоредни на диаметъра d_2 се разполовяват от спрегнатият му диаметър d_1

Ако докажем че (A_1, B_1, P, U_{d_2}) е хармонична група т.е. $(A_1, B_1, P, U_{d_2}) = 1 \Rightarrow P$ среда на A_1B_1 т.е

$F(P, U_{d_2}) = 0$. От дефиницията

$d_2 = \Pi(U_{d_1})$ ($d_1 d_2$ спрегнати) $\Rightarrow d_2 = \Pi(U_{d_1})$ но $P_1 \in d_2 \Rightarrow$

$F(P, U_{d_2}) = 0$

Симетрична Класификация

Метрична класификация. Метрични канонични уравнения на криви от втора степен

$$k: a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$k: \partial_{e_1 e_2}$

Разлежда $A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$
преобразуване в диагонална матрица, правим собствените вектори единични и търсим собствените стойности

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0 \qquad S^2 - (a_{11} + a_{22})S + a_{11}a_{12} - a_{12}^2 = 0$$

S - собствени числа

$$A_{33}\vec{u} = S\vec{u} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$\det(A_{33} - SE)$ - характеристичен полином (собствени числа)

$$(A_{33} - SE)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11} - S_1)u_1 + a_{12}u_2 = 0$$

$e_1 = \frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|}$ нов базис - единичен

$$(a_{11} - S_2)u_1 + a_{12}u_2 = 0 \qquad e_2 = \frac{\vec{u_2}}{|\vec{u_2}|}$$

$\vec{e_1}\vec{e_2} = 0$ - ортонормирана координатна система
Вземаме $\bar{U}: O\bar{e}_1\bar{e}_2$ от $U: Oe_1e_2$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = (T^t)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e} = T^t e$$

ортогонална

$$\vec{V} = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2)\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \bar{x}^t\bar{e} = x^t e \text{ от } x = T\bar{x} \Rightarrow$$

$\bar{K}$ има вида

$$\boxed{\bar{K}: S_1\bar{x}^2 + S_2\bar{y}^2 + 2a_{13}\bar{x} + 2a_{23}\bar{y} + \bar{a}_{33} = 0}$$

Ако $S_1 = S_2 \to$ окръжност
$S_1 = -S_2 \to$
ако $S_1 = S_2 = 0 \to$

$\bar{\bar{k}} \equiv \bar{\bar{0}}\ \bar{e}_1 \bar{e}_2$; $\bar{x} = \bar{\bar{x}} + \alpha$; $\bar{\eta} = \bar{\bar{\eta}} + \beta$

след транслация

$$\bar{\bar{k}} : s_1 \bar{\bar{x}}^2 + s_2 \bar{\bar{\eta}}^2 + \bar{\bar{x}}(2s_1\alpha + 2\bar{a}_{13}) + \bar{\bar{\eta}}(2s_2\beta + 2\bar{a}_{23}) + \bar{a}_{33} +$$
$$+ s_1\alpha^2 + s_2\beta^2 + 2\bar{a}_{13}\alpha + 2\bar{a}_{23}\beta = 0$$

$s_1 s_2 \neq 0$ елиптичен или определяме α и β от

$$\left.\begin{array}{l} 2s_1\alpha + 2\bar{a}_{13} = 0 \\ 2s_2\beta + 2\bar{a}_{23} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \bar{\bar{k}} : s_1 \bar{\bar{x}}^2 + s_2 \bar{\bar{\eta}}^2 + \bar{a}_{13} = 0$$

$$\alpha = -\frac{a_{13}}{s_1} \quad ; \quad \beta = -\frac{a_{23}}{s_2}$$

при $s_1 s_2 a_{33} \neq 0$ и с еднакви знаци - Реална елипса

тогава $s_1 x^2 + s_2 y^2 + a_{33} = 0$ - имагинерна елипса

при $s_1 s_2$ еднакви знаци, a_{33} - противоположен знаме

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{a_{33}}{s_1}$, $b^2 = \frac{a_{33}}{s_2}$ - елипса

Всяка крива от втори ред може чрез смяна на ортонормираната координатна система да се приведе в един от следните девет типа

① $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ → елипса ; ② $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ → имагинерна елипса

③ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ → хипербола ; ④ $y^2 = 2px$ → парабола

⑤ $y^2 = a^2 x^2$ → 2 реални пресичащи се прави

⑥ $y^2 = -a^2 x^2$ → имагинерно комплексно спрегнати

⑦ $y^2 = a^2$ → $s_2 a_{33} < 0$ → 2 успоредни прави

⑧ $y^2 = -a^2$ → $s_2 a_{33} > 0$ → 2 успоредни имагинерни прави

⑨ $y^2 = 0$ → една двойна права

Матрична, канонично уравнение
Фокус и директриса

$x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 30 = 0$
$\Phi = a_{11}x + 2a_{12}xy + a_{13}y$

$\begin{vmatrix} 1-s & 2 \\ 2 & 4-s \end{vmatrix} = 0$ $\quad (5-s)^2$

$25 - 10s + s^2 - 16 \Rightarrow s(s-10) = 0$

$s^2 - 5s = 0 \Rightarrow s(s-5) = 0$

$s_1 = 0 \qquad s_2 = 5$

при $s_1 = 0 \Rightarrow$ търсим собствените стойности

$u^1 + 2u^2 = 0 \Rightarrow u^1 = -2u^2 \Rightarrow$

$\vec{u_1}(-2, 1) \qquad \bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2e_1 + e_2)$ - при $s=0$

$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 + 2e_2)$ - при $s=5$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \qquad T^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\bar{x_1} + \bar{y}); \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x_1} + 2\bar{y})$

$\bar{k}: 5\bar{y}^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}(-2\bar{x} + \bar{y}) + \frac{10}{\sqrt{5}}(\bar{x} + 2\bar{y}) - 30 = 0$

$\bar{k}: 5\bar{y}^2 + \bar{x}\left(\frac{40}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}}\right) + \bar{y}\left(-\frac{20}{\sqrt{5}} + \frac{20}{\sqrt{5}}\right) - 30 = 0$

$\bar{k}: 5\bar{y}^2 + \frac{50}{\sqrt{5}} - 30 = 0 \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{x} = \bar{\bar{x}} + \alpha \\ \bar{y} = \bar{\bar{y}} + 0 \end{cases} \Rightarrow$

$5\bar{\bar{y}}^2 + \frac{50}{\sqrt{5}}\bar{\bar{x}} + \frac{50}{\sqrt{5}}\alpha - 30 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{5}\cdot 3}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$y^2 = -\frac{10}{\sqrt{5}}x$ $\quad F\left(\bar{x} = -\frac{5}{\sqrt{5}}, \bar{y} = 0\right)$

